Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

С1 а) Решите уравнение $\sin^2\frac{x}{2} - \cos^2\frac{x}{2} = \cos 2x$.

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{\pi}{2};\ 2\pi\right]$.

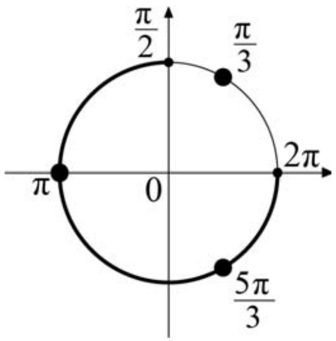
Преобразуем уравнение:

$$-\cos x = \cos 2x;$$
$$\cos(x+\pi) = \cos 2x.$$

Значит, $x + \pi = 2x + 2\pi k$ или $x + \pi = -2x + 2\pi k$, где $k \in Z$.

В первом случае $x = \pi + 2\pi k$, во втором случае $x = -\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3}$, где $k \in \mathbb{Z}$.

Первая серия решений входит во вторую.



б) Отметим решения на тригонометрической окружности.

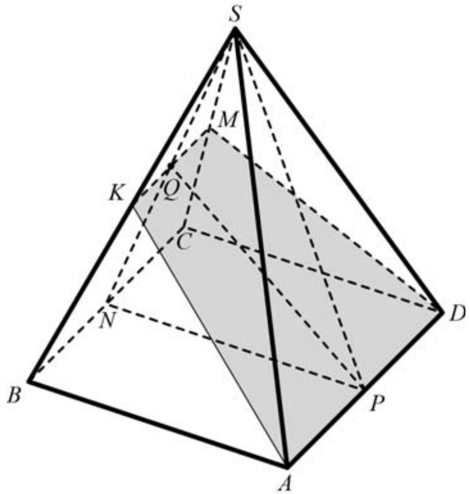
Отрезку $\left[\frac{\pi}{2};\ 2\pi\right]$ принадлежат корни π и $\frac{5\pi}{3}$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3},\ k \in Z$; б) $\pi;\ \frac{5\pi}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Уравнение решено верно, указаны все корни, принадлежащие интервалу	2
Уравнение решено верно, однако корни, принадлежащие интервалу, не указаны или указаны неверно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

С2 Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$. Боковое ребро $SA = \sqrt{5}$, сторона основания равна 2. Найдите расстояние от точки B до плоскости ADM, где M – середина ребра SC.

Построим сечение $ADMK$, K – середина ребра SB. Прямая BC параллельна AD, значит, искомое расстояние равно расстоянию от точки N до плоскости ADM, где N – середина BC. Пусть P – середина AD. Рассмотрим сечение NSP.



$$SN = SP = \sqrt{SA^2 - AP^2} = \sqrt{5-1} = 2$$

.

Значит, треугольник SNP равносторонний. Искомое расстояние равно расстоянию от N до PQ, где Q – середина SN, PQ – медиана и высота $\triangle SNP$.

Поэтому искомое расстояние равно $NQ = \frac{1}{2}SN = 1$.

Ответ: 1.

Содержание критерия	Баллы
Обосновано получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C3 Решите систему

$$\begin{cases} 3^{4x-1}+3^{4x+1}\geq 80, \\ \log_{\frac{x}{2}}\left(4x^2-3x+1\right)\geq 0. \end{cases}$$

1. Решим первое неравенство:

$$3^{4x-1}(1+9)\geq 80;\ \ 3^{4x-1}\geq 8;\ \ 4x-1\geq \log_3 8;\ \ x\geq \frac{\log_3 8+1}{4}.$$

2. Решим второе неравенство $4x^2-3x+1>0$ при всех x. При условиях $x>0$ и $x\neq 2$ получаем неравенство

$$\left(\frac{x}{2}-1\right)\left(4x^2-3x+1-1\right)\geq 0;$$

$$x(x-2)(4x-3)\geq 0.$$

При указанных условиях получаем: $0<x\leq \frac{3}{4}$ или $x>2$.

3. Решением системы является общая часть решений двух неравенств. $1<\log_3 8<2$, поэтому $1<\frac{\log_3 8+1}{4}<\frac{3}{4}$. Следовательно,

$$\frac{\log_3 8+1}{4}\leq x\leq \frac{3}{4} \text{ или } x>2.$$

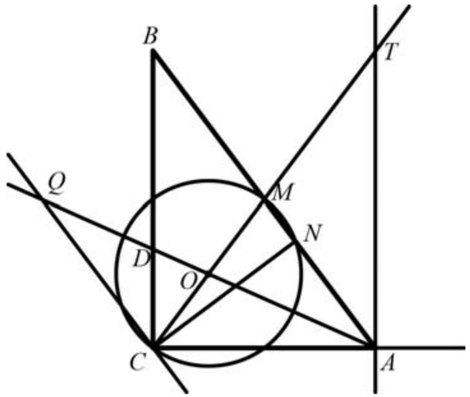
Ответ: $\left[\frac{\log_3 24}{4};\frac{3}{4}\right]$, $(2;+\infty)$.

Содержание критерия	Баллы
Обосновано получен верный ответ	3
Оба неравенства системы решены верно, но система решена неверно	2
Либо верно решено только одно из двух неравенств системы, либо в решениях двух неравенств содержатся арифметические ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C4 Дан треугольник ABC со сторонами $AB=15$, $AC=9$ и $BC=12$. На стороне BC взята точка D, а на отрезке AD – точка O, причем $CD=4$ и $AO=3OD$. Окружность с центром O проходит через точку C. Найдите расстояние от точки C до точки пересечения этой окружности с прямой AB.

Проведем через вершину A прямую, параллельную BC. Пусть T – точка ее пересечения с прямой CO, а M – точка пересечения AB и CT. Треугольник AOT подобен треугольнику DOC с коэффициентом $\frac{AO}{OD}=3$, поэтому $AT=3CD=12$.

Значит, треугольник AMT равен треугольнику BMC по стороне и двум прилежащим к ней углам. Тогда M – середина стороны AB. Следовательно, CM – медиана треугольника ABC.



Через вершину C проведем прямую, параллельную AB. Пусть Q – точка ее пересечения с прямой AO. Треугольник CDQ подобен треугольнику BDA с коэффициентом $\frac{CD}{DB}=\frac{1}{2}$, поэтому $CQ=\frac{1}{2}AB=7,5=AM$. Тогда треугольники AMO и QCO равны по стороне и двум прилежащим к ней углам. Поэтому O – середина CM.

Окружность с центром O проходит через точку C, и при этом $OM=OC$. Следовательно, OM – радиус этой окружности. Поскольку треугольник ABC прямоугольный, $CM=\frac{1}{2}AB=7,5$, а точка M — одна из точек пересечения прямой AB и окружности.

Пусть N – вторая точка пересечения окружности с прямой AB. Тогда угол CNM — вписанный и опирающийся на диаметр CM, так что $CN\perp AB$, то есть CN – высота треугольника ABC. Отсюда

$$CN=\frac{AC\cdot BC}{AB}=\frac{9\cdot 12}{15}=\frac{36}{5}=7,2.$$

Ответ: 7, 5 или 7, 2.

Содержание критерия	Баллы
Обосновано получен верный ответ	3
Рассмотрена верная геометрическая конфигурация. Найдено одно верное значение искомой величины	2
Рассмотрена верная геометрическая конфигурация. Найдено одно значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

С1 а) Решите уравнение $\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)$.

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\pi;\ \frac{5\pi}{2}\right]$.

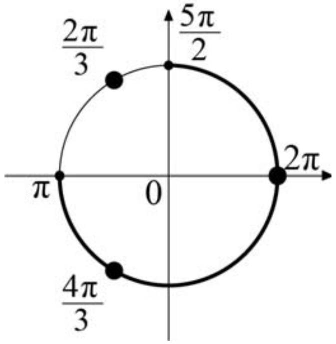
Преобразуем уравнение:

$$\cos x=\cos 2x;$$

Значит, $x=2x+2\pi k$ или $x=-2x+2\pi k$, где $k\in Z$.

В первом случае $x=2\pi k$, во втором случае $x=\frac{2\pi k}{3}$, где $k\in\mathbb{Z}$.

Первая серия решений входит во вторую.



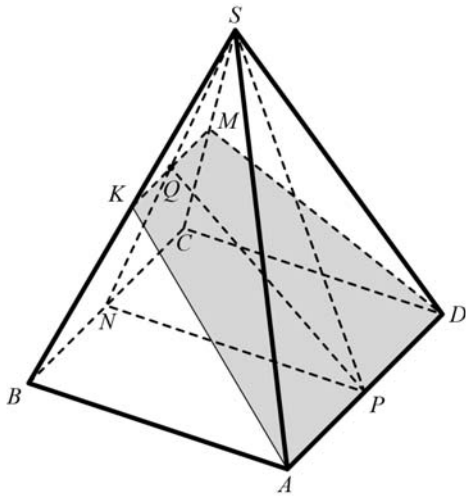
б) Отметим решения на тригонометрической окружности.
Отрезку $\left[\pi;\ \frac{5\pi}{2}\right]$ принадлежат корни $\frac{4\pi}{3}$ и 2π.

Ответ: а) $\frac{2\pi k}{3}$, $k\in Z$; б) $\frac{4\pi}{3}$; 2π.

Содержание критерия	Баллы
Уравнение решено верно, указаны все корни, принадлежащие интервалу	2
Уравнение решено верно, однако корни, принадлежащие интервалу, не указаны или указаны неверно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

С2 Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$. Боковое ребро $SA=\sqrt{5}$, сторона основания равна 2. Найдите расстояние от точки S до плоскости ADM, где M – середина ребра SC.

Построим сечение $ADMK$, K – середина ребра SB. Прямая BC параллельна AD, значит, искомое расстояние равно расстоянию от точки N до плоскости ADM. Пусть N – середина BC, P – середина AD. Рассмотрим сечение NSP.



$$SN=SP=\sqrt{SA^2-AP^2}=\sqrt{5-1}=2.$$

Значит, треугольник SNP равносторонний. Искомое расстояние равно расстоянию от S до PQ, где Q – середина SN. PQ – медиана и высота $\triangle SNP$. Поэтому искомое расстояние равно $SQ=\frac{1}{2}SN=1$.

Ответ: 1.

Содержание критерия	Баллы
Обосновано получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

С3 Решите систему

$$\begin{cases} 5^{3x-1} - 5^{3x+1} \le -72, \\ \log_{\frac{x}{3}}\left(3x^2 - 2x + 1\right) \ge 0. \end{cases}$$

---

1. Решим первое неравенство:

$$5^{3x-1}(1-25) \le -72;\ \ 5^{3x-1} \ge 3;\ \ 3x-1 \ge \log_5 3;\ \ x \ge \frac{\log_5 3 + 1}{3}.$$

2. Решим второе неравенство $3x^2 - 2x + 1 > 0$ при всех x. При условиях $x > 0$ и $x \ne 3$ получаем неравенство

$$\left(\frac{x}{3} - 1\right)\left(3x^2 - 2x + 1 - 1\right) \ge 0;$$

$$x(x-3)(3x-2) \ge 0.$$

При указанных условиях получаем: $0 < x \le \frac{2}{3}$ или $x > 3$.

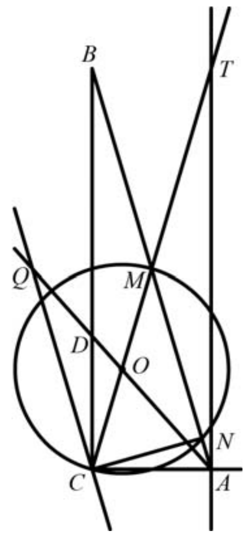
3. Решением системы является общая часть решений двух неравенств. $0 < \log_5 3 < 1$, поэтому $\frac{1}{3} < \frac{\log_5 3 + 1}{3} < \frac{2}{3}$. Следовательно,

$$\frac{\log_5 3 + 1}{3} \le x \le \frac{2}{3} \text{ или } x > 3.$$

Ответ: $\left[\frac{\log_5 15}{3}; \frac{2}{3}\right]$, $(3; +\infty)$.

Содержание критерия	Баллы
Обосновано получен верный ответ	3
Оба неравенства системы решены верно, но система решена неверно	2
Либо верно решено только одно из двух неравенств системы, либо в решениях двух неравенств содержатся арифметические ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

С4 Дан треугольник ABC со сторонами $AB = 25$, $AC = 7$ и $BC = 24$. На стороне BC взята точка D, а на отрезке AD – точка O, причем $CD = 8$ и $AO = 3OD$. Окружность с центром O проходит через точку C. Найдите расстояние от точки C до точки пересечения этой окружности с прямой AB.



Проведем через вершину A прямую, параллельную BC. Пусть T – точка ее пересечения с прямой CO, а M – точка пересечения AB и CT. Треугольник AOT подобен треугольнику DOC с коэффициентом $\frac{AO}{OD} = 3$, поэтому $AT = 3CD = 24$. Значит, треугольник AMT равен треугольнику BMC по стороне и двум прилежащим к ней углам. Тогда M – середина AB. Следовательно, CM – медиана треугольника ABC.

Через вершину C проведем прямую, параллельную AB. Пусть Q – точка ее пересечения с прямой AO. Треугольник CDQ подобен треугольнику BDA с коэффициентом $\frac{CD}{DB} = \frac{1}{2}$, поэтому $CQ = \frac{1}{2}AB = 12,5 = AM$. Тогда треугольники AMO и QCO равны по стороне и двум прилежащим к ней углам. Поэтому O – середина CM.

Окружность с центром O проходит через точку C, и при этом $OM = OC$. Следовательно, OM – радиус этой окружности. Поскольку треугольник ABC прямоугольный, $CM = \frac{1}{2}AB = 12,5$, а точка M — одна из точек пересечения прямой AB и окружности.

Пусть N – вторая точка пересечения окружности с прямой AB. Тогда угол CNM — вписанный и опирающийся на диаметр CM, так что $CN \perp AB$, то есть CN – высота треугольника ABC. Отсюда

$$CN = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{24 \cdot 7}{25} = 6,72.$$

Ответ: $12,5$ или $6,72$.

Содержание критерия.	Баллы.
Обосновано получен верный ответ.	3.
Рассмотрена верная геометрическая конфигурация. Найдено одно верное значение искомой величины.	2.
Рассмотрена верная геометрическая конфигурация. Найдено одно значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки.	1.
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0.
Максимальный балл.	3.

Ответы к заданиям с кратким ответом

№ задания	Ответ
B1	7040
B2	650000
B3	40,5
B4	157900
B5	-17
B6	111
B7	3

№ задания	Ответ
B8	-0,25
B9	19
B10	0,995
B11	32
B12	4
B13	72
B14	-5

Ответы к заданиям с кратким ответом

№ задания	Ответ
B1	8375
B2	13
B3	13,5
B4	172000
B5	-4
B6	174
B7	-5

№ задания	Ответ
B8	-0,25
B9	22
B10	0,99
B11	16
B12	2
B13	51
B14	-7