Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 а) Решите уравнение $\sin 2x - 2\sqrt{3}\cos^2 x - 4\sin x + 4\sqrt{3}\cos x = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\pi;\ \frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Преобразуем уравнение и разложим левую часть на множители:

$$2\sin x\cos x - 2\sqrt{3}\cos^2 x - 4\sin x + 4\sqrt{3}\cos x = 0;$$
$$\sin x(\cos x - 2) - \sqrt{3}\cos x(\cos x - 2) = 0;$$
$$(\cos x - 2)(\sin x - \sqrt{3}\cos x) = 0.$$

Уравнение $\cos x - 2 = 0$ не имеет корней. Следовательно,

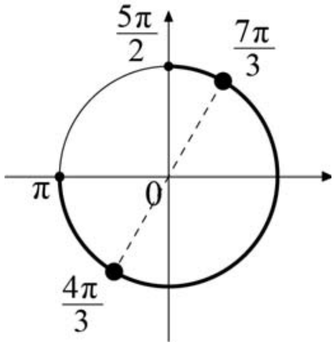
$$\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0.$$

Если $\cos x = 0$, то $\sin x = 0$, это невозможно. Значит, $\cos x \neq 0$. Разделим обе части уравнения на $\cos x$. Получаем:

$$\operatorname{tg} x - \sqrt{3} = 0.$$

Тогда $x = \frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

б) Отрезку $\left[\pi;\ \frac{5\pi}{2}\right]$ принадлежат корни $\frac{4\pi}{3}$ и $\frac{7\pi}{3}$.



Ответ: а) $\frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{4\pi}{3}$ и $\frac{7\pi}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а) или в пункте б)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

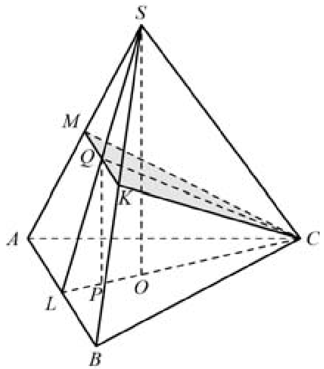
C2 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC, точка M – середина ребра SA, точка K – середина ребра SB. Найдите угол между плоскостями CMK и ABC, если $SC = 6$, $AB = 4$.

Решение.

Проведем перпендикуляр CQ к MK, Q – середина MK. Из точки Q опустим перпендикуляр QP на плоскость основания. Точка P лежит на медиане CL треугольника ABC. MK параллельна прямой пересечения плоскостей CMK и ABC, $QP \perp MK$ и $CQ \perp MK$. Следовательно, $\angle QCP$ – линейный угол искомого угла. Найдем QP.

$$SO = \sqrt{SC^2 - CO^2} = \sqrt{6^2 - \left(\frac{4\cdot\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{6^2 - \frac{16}{3}} = 2\sqrt{\frac{23}{3}};$$
$$QP = \frac{1}{2}SO = \sqrt{\frac{23}{3}};$$
$$CP = \frac{5}{6}CL = \frac{5}{3}\sqrt{3}.$$

Значит, $\operatorname{tg}\angle QCP = \frac{\sqrt{23}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot 5} = \frac{\sqrt{23}}{5}$.



Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{23}}{5}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено или при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

С3 Решите систему

$$\begin{cases} \log_{2x+1}(4x-5)+\log_{4x-5}(2x+1)\le 2, \\ 9^x-2\cdot 6^x-3\cdot 4^x\le 0. \end{cases}$$

Решение.

Решим первое неравенство:

$$\log_{2x+1}(4x-5)+\frac{1}{\log_{2x+1}(4x-5)}\le 2.$$

Сделаем замену $y=\log_{2x+1}(4x-5)$:

$$y+\frac{1}{y}\le 2;\quad \frac{(y-1)^2}{y}\le 0,$$

откуда $y=1$ или $y<0$.

Если $\log_{2x+1}(4x-5)=1$, то

$$\begin{cases} 2x+1=4x-5, \\ 2x+1>0, \\ 2x+1\ne 1, \end{cases}$$

откуда $x=3$.

Если $\log_{2x+1}(4x-5)<0$, то

$$\begin{cases} \dfrac{4x-5-1}{2x+1-1}<0, \\ 2x+1>0, \\ 4x-5>0, \\ 2x+1\ne 1, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} \dfrac{4x-6}{x}<0, \\ x>\dfrac{5}{4}; \end{cases}$$

$$\frac{5}{4}<x<\frac{3}{2}.$$

Решение неравенства: $\frac{5}{4}<x<\frac{3}{2}$ или $x=3$.

Решим второе неравенство. Разделим обе части на 4^x:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}-2\left(\frac{3}{2}\right)^{x}-3\le 0.$$

Сделаем замену $z=\left(\frac{3}{2}\right)^x$. Получаем:

$$z^2-2z-3\le 0;\ -1\le z\le 3.$$

Обратная замена дает: $\left(\frac{3}{2}\right)^x\le 3;\quad x\le \log_{1,5}3.$

Решением системы является общая часть решений двух неравенств. Учитывая, что $2<\log_{1,5}3<3$, находим решение системы: $\frac{5}{4}<x<\frac{3}{2}$.

Ответ: $\left(\frac{5}{4};\frac{3}{2}\right)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Оба неравенства системы решены верно, но система решена неверно	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве системы	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

С4 Площадь трапеции $ABCD$ равна 135. Диагонали пересекаются в точке O. Отрезки, соединяющие середину P основания AD с вершинами B и C, пересекаются с диагоналями трапеции в точках M и N. Найдите площадь треугольника MON, если одно из оснований трапеции вдвое больше другого.

Решение.

Пусть $AD = 2BC$ (рис. 1). Четырехугольники $ABCP$ и $BCDP$ – параллелограммы, поэтому M и N – середины BP и CP, значит, CM и BN – медианы треугольника BPC. Пусть h – высота трапеции. Положим $BC = a$, $AD = 2a$, $OM = x$. Тогда

$$\frac{a+2a}{2}h = \frac{3}{2}ah = 135, \quad ah = 90,$$

а $OC = 2x$, т.к. O – точка пересечения медиан треугольника BPC, поэтому

$$AM = MC = 3x, \quad OA = AM + OM = 3x + x = 4x, \quad \frac{OM}{OA} = \frac{x}{4x} = \frac{1}{4}.$$

Аналогично, $\frac{ON}{OD} = \frac{1}{4}$, значит, треугольник MON подобен треугольнику AOD с коэффициентом $\frac{1}{4}$. Следовательно,

$$S_{\triangle MON} = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot S_{\triangle AOD} = \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot\frac{2}{3}h = \frac{1}{24}ah = \frac{1}{24}\cdot 90 = \frac{15}{4}.$$

Рассмотрим случай, когда $BC = 2AD$ (рис. 2). Пусть h – высота трапеции. Положим $AD = a$, $BC = 2a$, $AM = 3t$. Тогда $ah = 90$.

Треугольник AOD подобен треугольнику COB с коэффициентом $\frac{1}{2}$, а треугольник AMP – треугольнику CMB с коэффициентом $\frac{AP}{BC} = \frac{1}{4}$. Тогда

$$\frac{AM}{MC} = \frac{1}{4}, \quad \frac{PM}{PB} = \frac{1}{5}, \quad MC = 12t, \quad AC = AM + MC = 15t, \quad AO = 5t, \quad MO = 2t,$$

значит, $\frac{OM}{OA} = \frac{2t}{5t} = \frac{2}{5}$. Аналогично, $\frac{ON}{OD} = \frac{2}{5}$.

Следовательно,

$$S_{\triangle MON} = \left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot S_{\triangle AOD} = \frac{4}{25}\cdot\frac{1}{2}a\cdot\frac{1}{3}h = \frac{2}{75}ah = \frac{2}{75}\cdot 90 = \frac{12}{5}.$$

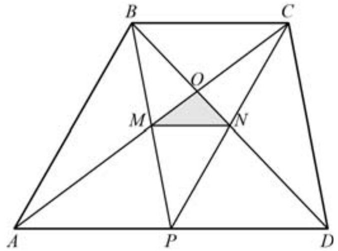


Рис. 1

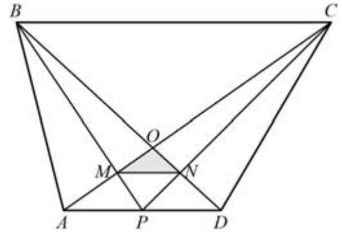


Рис. 2

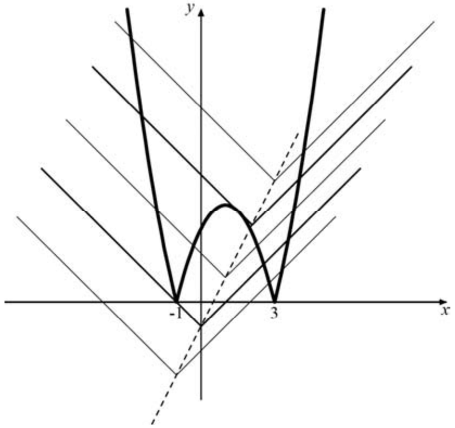
Ответ: $\frac{15}{4}$ или $\frac{12}{5}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

С5 При каких a уравнение $\left|x^2 - 2x - 3\right| - 2a = |x - a| - 1$ имеет ровно три корня?

Решение.

Запишем уравнение в виде $\left|x^2 - 2x - 3\right| = |x - a| + 2a - 1$. Построим график функции $y = \left|x^2 - 2x - 3\right|$ и график функции $y = |x - a| + 2a - 1$. Из рисунка видно, что подходящих значений a ровно два — при одном из них график правой части проходит через точку (–1; 0) при другом — касается отраженного участка параболы. Первое, очевидно, происходит при $a = 0$, а второе — когда уравнение $3 + 2x - x^2 = 3a - 1 - x$ имеет единственный корень. Приравнивая дискриминант к нулю, находим $a = \frac{25}{12}$.



Ответ: 0; $\frac{25}{12}$.

Содержание критерия	Баллы.
Обоснованно получен верный ответ	4.
Получен верный ответ, но он недостаточно обоснован, или в обосновании содержатся мелкие неточности, например отсутстуют рисунки для различных значений параметра	3.
Ход решения в целом верен, но ответ содержит посторонние числа, или найдено только одно из верных значений	2.
Решение содержит верную геометрическую интерпретацию задачи или верный переход к равносильной системе без модулей, дальнейшие содержательные продвижения отсутствуют	1.
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0.
Максимальный балл	4

C6 В возрастающей последовательности натуральных чисел каждые три последовательных члена образуют либо арифметическую, либо геометрическую прогрессию. Первый член последовательности равен 1, а последний 2046.

а) может ли в последовательности быть три члена?

б) может ли в последовательности быть четыре члена?

в) может ли в последовательности быть меньше 2046 членов?

Решение.

а) Нет, поскольку 1 + 2046 нечетно, а 2046 не является квадратом натурального числа.

б) Последовательность не может быть арифметической прогрессией, поскольку 2046 – 1 не делится на 3.

Последовательность не может быть геометрической прогрессией, поскольку число 2046 не является кубом натурального числа.

Если первые три члена образуют геометрическую прогрессию, а последние три – арифметическую, то эти числа: 1, q, , q^2, $2q^2$- q но уравнение $2q^2$- q – 2046 = 0 не имеет целых корней.

Если первые три члена образуют арифметическую прогрессию, а последние три – геометрическую, то первые три числа: 1,*a + 1* и , *2a +1*, где *a* – натуральное число. Тогда последнее число должно равняться $\frac{(2a+1)^2}{a+1} = 4a + 4 + \frac{1}{a+2}$, а это не целое число.

в) может ли в последовательности быть меньше 2046 членов?

Да, например 1, 2, 4, 6, 8, ..., 2046

Содержание критерия.	Баллы.
Верно решены все три пункта.	4.
Верно решены два пункта: *а* и *б* или *б* и *в*.	3.
Верно решены два пункта: *а* и *в* или один пункт *б*.	2.
Верно решен только один из пунктов: *а* или *в*.	1.
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0.
Максимальный балл.	4.

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

С1 а) Решите уравнение $\sin 2x - 2\sqrt{3}\sin^2 x + 4\cos x - 4\sqrt{3}\sin x = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$.

Решение.

а) Преобразуем уравнение и разложим левую часть на множители:

$$2\sin x\cos x - 2\sqrt{3}\sin^2 x + 4\cos x - 4\sqrt{3}\sin x = 0;$$
$$\cos x(\sin x + 2) - \sqrt{3}\sin x(\sin x + 2) = 0;$$
$$(\sin x + 2)(\cos x - \sqrt{3}\sin x) = 0.$$

Уравнение $\sin x + 2 = 0$ не имеет корней. Следовательно,

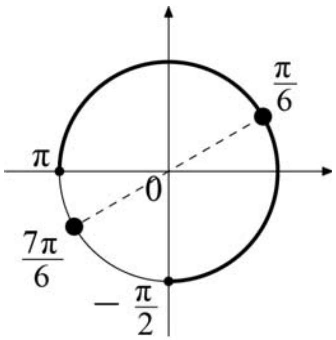
$$\cos x - \sqrt{3}\sin x = 0.$$

Если $\cos x = 0$, то $\sin x = 0$, это невозможно. Значит, $\cos x \neq 0$. Разделим обе части уравнения на $\sqrt{3}\cos x$. Получаем:

$$\mathrm{tg}\,x - \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.$$

Тогда $x = \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

б) Отрезку $\left[-\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$ принадлежит только корень $\frac{\pi}{6}$.



Ответ: а) $\frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{\pi}{6}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а) или в пункте б)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

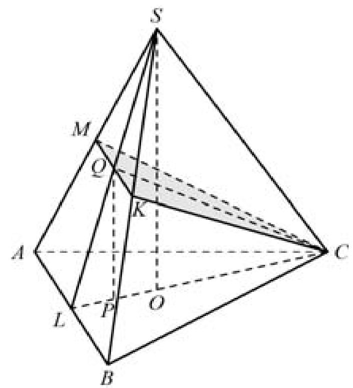
С2 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC, точка M – середина ребра SA, точка K – середина ребра SB. Найдите угол между плоскостями CMK и ABC, если $SC=8$, $AB=6$.

Решение.

Проведем перпендикуляр CQ к MK, Q – середина MK. Из точки Q опустим перпендикуляр QP на плоскость основания. Точка P лежит на медиане CL треугольника ABC. MK параллельна прямой пересечения плоскостей, $QP \perp MK$ и $CQ \perp MK$. Следовательно, $\angle QCP$ – линейный угол искомого угла. Найдем QP.

$$SO = \sqrt{SC^2 - CO^2} = \sqrt{8^2 - (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{64-12} = 2\sqrt{13};$$
$$QP = \frac{1}{2}SO = \sqrt{13};$$
$$CP = \frac{1}{2}OL = \frac{5}{6}CL = \frac{5}{2}\sqrt{3}.$$

Значит, $\mathrm{tg}\angle QCP = \frac{\sqrt{13}\cdot 2}{\sqrt{3}\cdot 5} = \frac{2\sqrt{39}}{15}$.



Ответ: $\mathrm{arctg}\frac{2\sqrt{39}}{15}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено или при правильном ответе решение недостаточно обоснованно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

С3 Решите систему

$$\begin{cases} \log_{3x+1}(4x-6)+\log_{4x-6}(3x+1)\le 2, \\ 16^x-12^x-2\cdot 9^x\le 0. \end{cases}$$

Решение.

Решим первое неравенство:

$$\log_{3x+1}(4x-6)+\frac{1}{\log_{3x+1}(4x-6)}\le 2.$$

Сделаем замену $y=\log_{3x+1}(4x-6)$:

$$y+\frac{1}{y}\le 2;\quad \frac{(y-1)^2}{y}\le 0,$$

откуда $y=1$ или $y<0$.

Если $\log_{3x+1}(4x-6)=1$, то

$$\begin{cases} 3x+1=4x-6, \\ 3x+1>0, \\ 3x+1\ne 1, \end{cases}$$

откуда $x=7$.

Если $\log_{3x+1}(4x-6)<0$, то

$$\begin{cases} \dfrac{4x-6-1}{3x+1-1}<0, \\ 3x+1>0, \\ 4x-6>0, \\ 3x+1\ne 1, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} \dfrac{4x-7}{x}<0, \\ x>\dfrac{3}{2}; \end{cases}$$

$$\frac{3}{2}<x<\frac{7}{4}.$$

Решение неравенства: $\frac{3}{2}<x<\frac{7}{4}$ или $x=7$.

Решим второе неравенство. Разделим обе части на 9^x:

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{2x}-\left(\frac{4}{3}\right)^{x}-2\le 0.$$

Сделаем замену $z=\left(\frac{4}{3}\right)^x$. Получаем: $z^2-z-2\le 0;\quad -1\le z\le 2.$

Обратная замена дает: $\left(\frac{4}{3}\right)^x\le 2;\ x\le\log_{\frac{4}{3}}2.$

Решением системы является общая часть решений двух неравенств. Учитывая, что $2<\log_{4/3}2<7$, находим решение системы: $\frac{3}{2}<x<\frac{7}{4}$.

Ответ: $\left(\frac{3}{2};\frac{7}{4}\right)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Оба неравенства системы решены верно, но система решена неверно	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве системы	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

С4 Площадь трапеции $ABCD$ равна 810. Диагонали пересекаются в точке O. Отрезки, соединяющие середину P основания AD с вершинами B и C, пересекаются с диагоналями трапеции в точках M и N. Найдите площадь треугольника MON, если одно из оснований трапеции вдвое больше другого.

Решение.

Пусть $AD = 2BC$ (рис. 1). Четырехугольники $ABCP$ и $BCDP$ – параллелограммы, поэтому M и N – середины BP и CP, значит, CM и BN – медианы треугольника BPC. Пусть h – высота трапеции. Положим $BC = a$, $AD = 2a$, $OM = x$. Тогда

$$\frac{a+2a}{2}h = \frac{3}{2}ah = 810, \quad ah = 540,$$

а $OC = 2x$, т.к. O – точка пересечения медиан треугольника BPC, поэтому

$$AM = MC = 3x, \quad OA = AM + OM = 3x + x = 4x, \quad \frac{OM}{OA} = \frac{x}{4x} = \frac{1}{4}.$$

Аналогично, $\frac{ON}{OD} = \frac{1}{4}$, значит, треугольник MON подобен треугольнику AOD с коэффициентом $\frac{1}{4}$. Следовательно,

$$S_{\triangle MON} = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot S_{\triangle AOD} = \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot\frac{2}{3}h = \frac{1}{24}ah = \frac{1}{24}\cdot 540 = \frac{45}{2}.$$

Рассмотрим случай, когда $BC = 2AD$ (рис. 2). Пусть h – высота трапеции. Положим $AD = a$, $BC = 2a$, $AM = 3t$. Тогда $ah = 540$.

Треугольник AOD подобен треугольнику COB с коэффициентом $\frac{1}{2}$, а треугольник AMP – треугольнику CMB с коэффициентом $\frac{AP}{BC} = \frac{1}{4}$. Тогда

$$\frac{AM}{MC} = \frac{1}{4}, \quad \frac{PM}{PB} = \frac{1}{5}, \quad MC = 12t, \quad AC = AM + MC = 15t, \quad AO = 5t, \quad MO = 2t,$$

значит, $\frac{OM}{OA} = \frac{2t}{5t} = \frac{2}{5}$. Аналогично, $\frac{ON}{OD} = \frac{2}{5}$. Следовательно,

$$S_{\triangle MON} = \left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot S_{\triangle AOD} = \frac{4}{25}\cdot\frac{1}{2}a\cdot\frac{1}{3}h = \frac{2}{75}ah = \frac{2}{75}\cdot 540 = \frac{72}{5}.$$

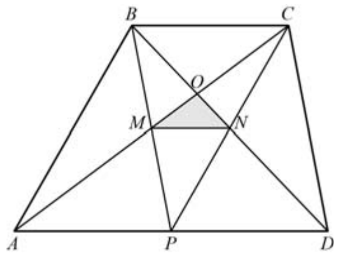


Рис. 1

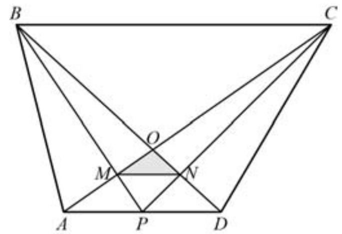


Рис. 2

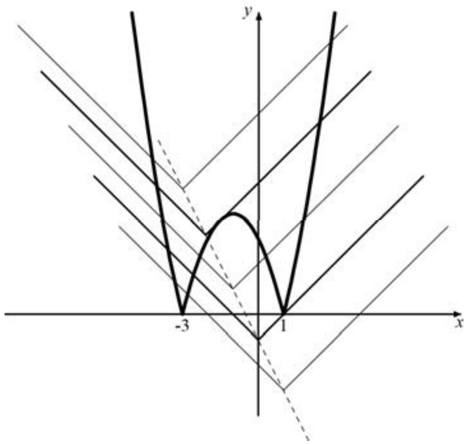
Ответ: $\frac{45}{2}$ или $\frac{72}{5}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

С5 При каких a уравнение $\left|x^2 + 2x - 3\right| - 2a = |x + a| - 1$ имеет ровно три корня?

Решение.

Запишем уравнение в виде $\left|x^2 + 2x - 3\right| = |x + a| + 2a - 1$. Построим графики функций $y = \left|x^2 + 2x - 3\right|$ и $y = |x + a| + 2a - 1$. Из рисунка видно, что подходящих значений a ровно два – при одном из них график правой части проходит через точку (1; 0), при другом – касается отраженного участка параболы. Первое, очевидно, происходит при $a = 0$, а второе – когда уравнение $3 - 2x - x^2 = 3a - 1 + x$ имеет единственный корень. Приравнивая дискриминант к нулю, находим $a = \frac{25}{12}$.



Ответ: 0; $\frac{25}{12}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
Получен верный ответ, но он недостаточно обоснован, или в обосновании содержатся мелкие неточности, например отсутствуют рисунки для различных значений параметра	3
Ход решения в целом верен, но ответ содержит посторонние числа, или найдено только одно из верных значений	2
Решение содержит верную геометрическую интерпретацию задачи или верный переход к равносильной системе без модулей, дальнейшие содержательные продвижения отсутствуют	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

С6 В возрастающей последовательности натуральных чисел каждые три последовательных члена образуют либо арифметическую, либо геометрическую прогрессию. Первый член последовательности равен 1, а последний 2076.

а) может ли в последовательности быть три члена?

б) может ли в последовательности быть четыре члена?

в) может ли в последовательности быть меньше 2076 членов?

а) Нет, поскольку $1+2076$ не делится на 2, а 2076 не является квадратом натурального числа.

б) Последовательность не может быть арифметической прогрессией, поскольку $2076-1$ не делится на 3.

Последовательность не может быть геометрической прогрессией, поскольку 2076 не является кубом натурального числа.

Если первые три члена образуют геометрическую прогрессию, а последние три – арифметическую, то эти числа: 1, q, q^2, $2q^2-q$, но уравнение $2q^2-q-2076=0$ не имеет целых корней.

Если первые три члена образуют арифметическую прогрессию, а последние три – геометрическую, то эти числа: 1, $a+1$ и $2a+1$ где a – натуральное число. Тогда последнее число должно равняться $\frac{(2a+1)^2}{a+1}=4a+4+\frac{1}{a+1}$, а это не натуральное число.

в) Да, например 1, 2, 4, 6, 8, ..., 2076.

Содержание критерия	Баллы
Верно решены все три пункта	4
Верно решены два пункта: *а* и *б* или *б* и *в*	3
Верно решены два пункта: *а* и *в* или один пункт *б*	2
Верно решен только один из пунктов: *а* или *в*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4