Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

С1 Дано уравнение $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+2x\right)=\cos x$.

а) Решите уравнение;

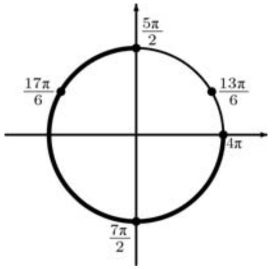
б) Укажите корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2};\ 4\pi\right]$.

Решение.
а) По формуле приведения получим:

$$\sin 2x=\cos x,\quad 2\sin x\cos x=\cos x,\quad \cos x(2\sin x-1)=0.$$

Значит, $\cos x=0$ или $\sin x=\frac{1}{2}$.

Корни: $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$; $x=\frac{\pi}{6}+2\pi k$ или $x=\frac{5\pi}{6}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.



б) С помощью единичной окружности отберём корни на отрезке $\left[\frac{5\pi}{2};\ 4\pi\right]$:

$$\frac{5\pi}{2},\ \frac{17\pi}{6},\ \frac{7\pi}{2}.$$

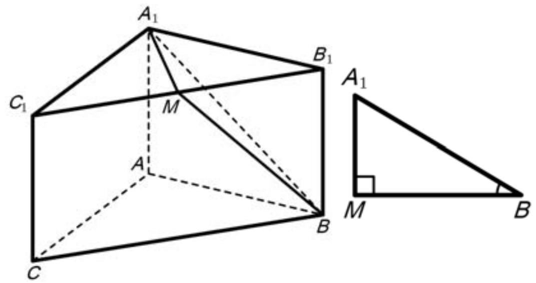
Ответ: а) $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$; $x=\frac{\pi}{6}+2\pi k$; $x=\frac{5\pi}{6}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. б) $\frac{5\pi}{2}$, $\frac{17\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{2}$.

Содержание критерия	Баллы
В уравнении получен обоснованный ответ, верно указаны корни, принадлежащие отрезку	2
Уравнение решено верно, однако корни, принадлежащие отрезку, не указаны или указаны неверно	1
Уравнение решено неверно	0
Максимальный балл	2

С2 Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный треугольник ABC, $AB=AC=5$, $BC=8$. Высота призмы равна 3. Найдите угол между прямой A_1B и плоскостью BCC_1.

Поскольку призма $ABCA_1B_1C_1$ прямая, то высота A_1M треугольника $A_1B_1C_1$ перпендикулярна плоскости BCC_1. Поэтому прямая BM – проекция прямой A_1B на плоскость BCC_1. Значит, искомый угол равен углу A_1BM.

Так как $B_1M=4, BB_1=3$, то $BM=5$; $A_1M=\sqrt{A_1B_1{}^2-B_1M^2}=3$. Отсюда $\operatorname{tg}\angle A_1BM=\frac{A_1M}{BM}=\frac{3}{5}$. Следовательно, $\angle A_1BM=\operatorname{arctg}\frac{3}{5}=\operatorname{arctg}0{,}6$.



Ответ: arctg 0,6.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

С3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{2x^2-2x+1}{2x-1} \le 1, \\ 25x^2 - 3|3-5x| < 30x-9. \end{cases}$$

Преобразуем первое неравенство:

$$\frac{2x^2-2x+1-2x+1}{2x-1} \le 0; \quad \frac{x^2-2x+1}{2x-1} \le 0; \quad \frac{(x-1)^2}{2x-1} \le 0.$$

Решения: $x = 1$ или $x < \dfrac{1}{2}$.

Преобразуем второе неравенство:

$$25x^2 - 30x + 9 - 3|3-5x| < 0; \quad (5x-3)^2 - 3|5x-3| < 0.$$

Сделаем замену $y = |5x-3|$. Получаем неравенство второй степени $y^2 - 3y < 0$, откуда $0 < y < 3$.

Обратная замена дает: $0 < |5x-3| < 3$, откуда $0 < x < 0,6$ или $0,6 < x < 1,2$.

Решение системы неравенств: $0 < x < 0,5$ или $x = 1$.

Ответ: $(0;\ 0,5)$; 1.

Содержание критерия	Баллы
Получен верный обоснованный ответ	3
Оба неравенства решены верно, но ответ к системе отсутствует или неверный	2
Верно решено только одно из неравенств	1
Не решено верно ни одно из неравенств	0
Максимальный балл	3

С4 Точка M лежит на отрезке AB. На окружности с диаметром AB взята точка C, удаленная от точек A, M и B на расстояния 20, 14 и 15 соответственно. Найдите площадь треугольника BMC.

Точка C лежит на окружности с диаметром AB, поэтому $\angle ACB = 90°$. По теореме Пифагора

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25.$$

Пусть CD – высота треугольника ABC. Тогда

$$CD = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{20 \cdot 15}{25} = 12, \quad BD = \sqrt{BC^2 - CD^2} = \sqrt{225-144} = 9.$$

Из прямоугольного треугольника CMD находим:

$$DM = \sqrt{CM^2 - CD^2} = \sqrt{14^2 - 12^2} = 2\sqrt{13}.$$

Пусть точка M лежит между точками A и D (рис. 1). Тогда $MB = MD + BD = 9 + 2\sqrt{13}$. Следовательно,

$$S_{BMC} = \frac{1}{2} MB \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot (9 + 2\sqrt{13}) = 54 + 12\sqrt{13}.$$

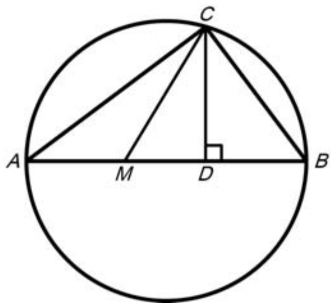


Рис.1

Если точка M лежит между B и D (рис. 2), то $MB = BD - MD = 9 - 2\sqrt{13}$. Следовательно,

$$S_{BMC} = \frac{1}{2} MB \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot (9 - 2\sqrt{13}) = 54 - 12\sqrt{13}.$$

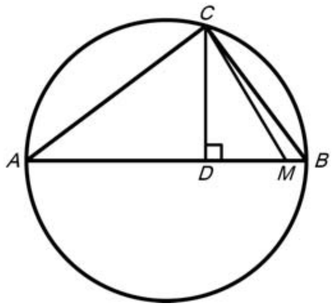


Рис.2

Ответ: $54 \pm 12\sqrt{13}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x) = 4ax + \left|x^2 - 6x + 5\right|$ больше, чем -24.

1. Функция $f(x)$ имеет вид:

а) при $x^2 - 6x + 5 = (x-1)(x-5) \ge 0$

$$f(x) = 4ax + \left(x^2 - 6x + 5\right) = x^2 + 2(2a-3)x + 5,$$

а ее график состоит из двух частей параболы с ветвями, направленными вверх и осью симметрии $x = 3 - 2a$;

б) при $(x-1)(x-5) \le 0 \Leftrightarrow 1 \le x \le 5$

$$f(x) = 4ax - \left(x^2 - 6x + 5\right) = -x^2 + 2(2a+3)x - 5,$$

а её график представляет собой часть параболы с ветвями, направленными вниз.

2. Если $3 - 2a$ принадлежит отрезку $[1; 5]$, то наименьшее значение функция может принимать только в точках $x = 1$ и $x = 5$. Если $3 - 2a \notin [1; 5]$ – то еще и в точке $x = 3 - 2a$.

3. Наименьшее значение функции $f(x)$ больше -24 тогда и только тогда, когда

$$\text{либо} \begin{cases} 3-2a \in [1;\ 5], \\ f(1) > -24, \\ f(5) > -24, \end{cases} \quad \text{либо} \begin{cases} 3-2a \notin [1;\ 5], \\ f(1) > -24, \\ f(5) > -24, \\ f(3-2a) > -24. \end{cases}$$

Решим первую систему:

$$\begin{cases} -1 \le a \le 1, \\ 4a > -24, \\ 20a > -24; \end{cases} \quad -1 \le a \le 1.$$

Решим вторую систему:

$$\begin{cases} a \in (-1,2;\ -1) \cup (1;\ +\infty), \\ |2a-3| < \sqrt{29}; \end{cases} \quad \frac{3-\sqrt{29}}{2} < a < -1 \quad \text{или} \quad 1 < a < \frac{3+\sqrt{29}}{2}.$$

Ответ: $\dfrac{3-\sqrt{29}}{2} < a < \dfrac{3+\sqrt{29}}{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все верные значения параметра, но решение недостаточно обосновано	3
С помощью верного рассуждения получен промежуток, содержащий верный ответ, либо содержащийся в верном промежутке	2
Задача сведена к исследованию взаимного расположения частей двух парабол	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

C6 Все члены геометрической прогрессии – различные натуральные числа, заключенные между числами 210 и 350.

а) может ли такая прогрессия состоять из четырех членов?

б) может ли такая прогрессия состоять из пяти членов?

а) Приведём пример геометрической прогрессии из четырёх членов: взяв $b_1 = 216 = 6^3$ и $q = \dfrac{7}{6}$, получим $b_2 = 6 \cdot 6 \cdot 7 = 252$, $b_3 = 6 \cdot 7 \cdot 7 = 294$, $b_4 = 7^3 = 343$.

б) Докажем, что прогрессии из пяти членов, удовлетворяющей условию задачи, не существует.

Предположим, такая последовательность есть. Без ограничения общности она возрастает; пусть её знаменатель есть $q = \dfrac{m}{k}$, где m и k — взаимно простые натуральные числа. Тогда прогрессия имеет вид

$$210 < b_1 < b_2 = b_1 q < \ldots < b_5 = b_1 q^4 = \frac{b_1}{k^4} \cdot m^4 < 350;$$

так как m и k взаимно просты, b_1 делится на k^4, а значит, $m^4 < 350$, откуда $m \le 4$.
Так как $q > 1$, $k < m$ Но k – целое, поэтому $k \le m - 1 \le 3$. Отсюда

$$q = \frac{m}{k} \ge \frac{m}{m-1} = 1 + \frac{1}{m-1} \ge 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}.$$

Поэтому

$$b_5 = b_1 q^4 \ge b_1 \cdot \frac{4^4}{3^4} > 210 \cdot \frac{256}{81} > 350,$$

что противоречит требованию задачи.
Ответ: а) да. б) нет

Содержание критерия.	Баллы.
Верно выполнены: а), б).	4.
При выполнении заданий а) или б) допущена ошибка или неточность, не повлиявшая на ход решения. Ответ верный.	3
Верно выполнен только пункт б)	2.
Верно выполнен только пункт а)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0.
Максимальный балл	4

© МИОО, 2011 г.

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 Дано уравнение $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - 2x\right) = \sin x$.

а) Решите уравнение;

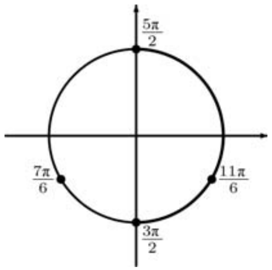
б) Укажите корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$.

а) По формуле приведения получим:

$$-\cos x2 = \sin x,\ 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0.$$

Значит, $\sin x = 1$ или $\sin x = -\frac{1}{2}$.

Корни: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$; $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$ или $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.



б) С помощью единичной окружности отберём корни на отрезке $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$:

$$\frac{11\pi}{6} \text{ и } \frac{5\pi}{2}.$$

Ответ: а) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$; $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$; $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{11\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{2}$.

Содержание критерия	Баллы
В уравнении получен обоснованный ответ, верно указаны корни, принадлежащие отрезку	2
Уравнение решено верно, однако корни, принадлежащие отрезку, не указаны или указаны неверно	1
Уравнение решено неверно	0
Максимальный балл	2

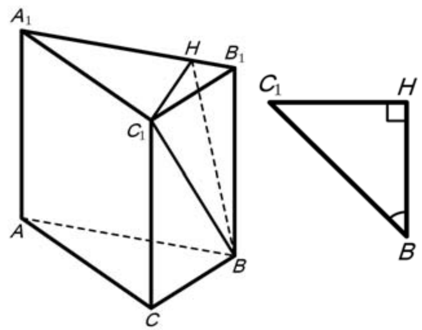
C2 Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник ABC, $\angle C = 90^\circ$, $AB = 5$, $BC = \sqrt{5}$. Высота призмы равна $\sqrt{3}$. Найдите угол между прямой C_1B и плоскостью ABB_1.

Поскольку призма $ABCA_1B_1C_1$ прямая, то высота C_1H треугольника $A_1B_1C_1$ перпендикулярна плоскости ABB_1. Поэтому прямая BH – проекция прямой C_1B на плоскость ABB_1. Значит, искомый угол равен углу C_1BH.

Так как $A_1C_1 = \sqrt{A_1B_1^{\ 2} - B_1C_1^{\ 2}} = 2\sqrt{5}$, то

$$C_1H = \frac{A_1C_1 \cdot B_1C_1}{A_1B_1} = 2;\ BC_1 = \sqrt{BB_1^{\ 2} + B_1C_1^2} = 2\sqrt{2}.$$

Получается, что в прямоугольном треугольнике C_1BH гипотенуза BC_1 в $\sqrt{2}$ раз больше катета C_1H. Следовательно, $\angle C_1BH = 45^\circ$.



Ответ: 45°

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

С3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{2x^2-6x+5}{2x-3} \le 1, \\ 25x^2-4|8-5x| < 80x-64. \end{cases}$$

Преобразуем первое неравенство:

$$\frac{2x^2-6x+5-2x+3}{2x-3} \le 0; \quad \frac{x^2-4x+4}{2x-3} \le 0; \quad \frac{(x-2)^2}{2x-3} \le 0.$$

Решения: $x = 2$ или $x < 1,5$.

Преобразуем второе неравенство:

$$25x^2-80x+64-4|8-5x| < 0; \quad (5x-8)^2-4|5x-8| < 0.$$

Сделаем замену $y = |5x-8|$. Получаем неравенство второй степени $y^2-4y<0$, откуда $0 < y < 4$.

Обратная замена дает: $0 < |5x-8| < 4$, откуда $0,8 < x < 1,6$ или $1,6 < x < 2,4$.

Решение системы неравенств: $0,8 < x < 1,5$ или $x = 2$.

Ответ: $(0,8;\ 1,5);\ 2$.

Содержание критерия	Баллы
Получен верный обоснованный ответ	3
Оба неравенства решены верно, но ответ к системе отсутствует или неверный	2
Верно решено только одно из неравенств	1
Не решено верно ни одно из неравенств	0
Максимальный балл	3

С4 Точка M лежит на отрезке AB. На окружности с диаметром AB взята точка C, удаленная от точек A, M и B на расстояния 40, 29 и 30 соответственно. Найдите площадь треугольника BMC.

Точка C лежит на окружности с диаметром AB, поэтому $\angle ACB = 90°$. По теореме Пифагора

$$AB = \sqrt{AC^2+BC^2} = \sqrt{40^2+30^2} = 50.$$

Пусть CD – высота треугольника ABC. Тогда

$$CD = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{40 \cdot 30}{50} = 24, \quad BD = \sqrt{BC^2-CD^2} = \sqrt{900-576} = 18.$$

Из прямоугольного треугольника CMD находим:

$$DM = \sqrt{CM^2-CD^2} = \sqrt{29^2-24^2} = \sqrt{265}.$$

Пусть точка M лежит между точками A и D (рис. 1). Тогда

$$MB = MD + BD = 18 + \sqrt{265}.$$

Следовательно,

$$S_{BMC} = \frac{1}{2} MB \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot (18+\sqrt{265}) = 216 + 12\sqrt{265}$$

.

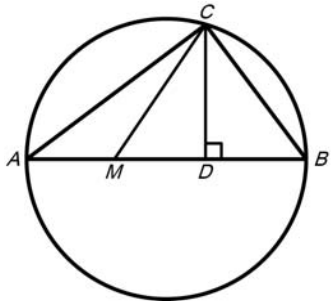


Рис.1

Если точка M лежит между B и D (рис. 2), то $MB = BD - MD = 18 - \sqrt{265}$. Следовательно,

$$S_{BMC} = \frac{1}{2} MB \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot (18-\sqrt{265}) = 216 - 12\sqrt{265}.$$

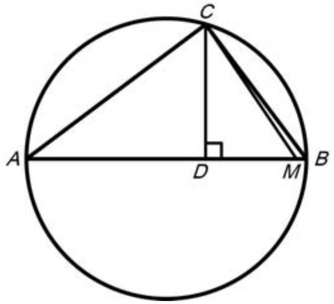


Рис.2

Ответ: $216 \pm 12\sqrt{265}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x) = 4ax + \left|x^2 - 10x + 21\right|$ больше, чем -42.

1. Функция $f(x)$ имеет вид:

а) при $x^2 - 10x + 21 = (x-3)(x-7) \geq 0$

$$f(x) = 4ax + \left(x^2 - 10x + 21\right) = x^2 + 2(2a-5)x + 21,$$

а ее график состоит из двух частей параболы с ветвями, направленными вверх и осью симметрии $x = 5 - 2a$;

б) при $(x-3)(x-7) \leq 0 \Leftrightarrow 3 \leq x \leq 7$

$$f(x) = 4ax - \left(x^2 - 10x + 21\right) = -x^2 + 2(2a+5)x - 21,$$

а её график представляет собой часть параболы с ветвями, направленными вниз.

2. Если $5 - 2a$ принадлежит отрезку $[3;\, 7]$, то функция может принять наименьшее значение только в точках $x = 3$ и $x = 7$. Если $5 - 2a \notin [3;\, 7]$ – то еще и в точке $x = 5 - 2a$.

3. Наименьшее значение функции $f(x)$ больше -42 тогда и только тогда, когда

$$\text{либо} \begin{cases} 5 - 2a \in [3;\ 7], \\ f(3) > -42, \\ f(7) > -42, \end{cases} \quad \text{либо} \begin{cases} 5 - 2a \notin [3;\ 7], \\ f(3) > -42, \\ f(7) > -42, \\ f(5-2a) > -42. \end{cases}$$

Решим первую систему:

$$\begin{cases} -1 \leq a \leq 1, \\ 12a > -42, \\ 28a > -42; \end{cases} \quad -1 \leq a \leq 1.$$

Решим вторую систему:

$$\begin{cases} a \in (-1,5;\ -1) \cup (1;\ +\infty), \\ |2a - 5| < 3\sqrt{7}; \end{cases} \quad \frac{5 - 3\sqrt{7}}{2} < a < -1 \quad \text{или} \quad 1 < a < \frac{5 + 3\sqrt{7}}{2}.$$

Ответ: $\dfrac{5 - 3\sqrt{7}}{2} < a < \dfrac{5 + 3\sqrt{7}}{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все верные значения параметра, но решение недостаточно обосновано	3
С помощью верного рассуждения получен промежуток, содержащий верный ответ, либо содержащийся в верном промежутке	2
Задача сведена к исследованию взаимного расположения частей двух парабол	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

C6 Все члены геометрической прогрессии – различные натуральные числа, заключенные между числами 510 и 740.

а) может ли такая прогрессия состоять из четырех членов?

б) может ли такая прогрессия состоять из пяти членов?

а) Приведём пример геометрической прогрессии из четырёх членов: взяв $b_1 = 512 = 8^3$ и $q = \dfrac{9}{8}$, получим $b_2 = 8 \cdot 8 \cdot 9 = 576$, $b_3 = 8 \cdot 9 \cdot 9 = 648$, $b_4 = 9^3 = 729$.

б) Докажем, что прогрессии из пяти членов, удовлетворяющей условию задачи, не существует.

Предположим, такая последовательность есть. Без ограничения общности она возрастает; пусть её знаменатель есть $q = \dfrac{m}{k}$, где m и k — взаимно простые натуральные числа. Тогда прогрессия имеет вид

$$510 < b_1 < b_2 = b_1 q < \ldots < b_5 = b_1 q^4 = \frac{b_1}{k^4} \cdot m^4 < 740;$$

так как m и k взаимно просты, b_1 делится на k^4, а значит, $m^4 < 740$, откуда $m \le 5$. Так как $q > 1$, $k < m$. Но k целое, поэтому $k \le m - 1 \le 4$. Отсюда

$$q = \frac{m}{k} \ge \frac{m}{m-1} = 1 + \frac{1}{m-1} \ge 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}.$$

Поэтому

$$b_5 = b_1 q^4 \ge b_1 \cdot \frac{5^4}{4^4} > 510 \cdot \frac{625}{256} > 740,$$

что противоречит требованию задачи.

Ответ: а) да; б) нет

Содержание критерия	Баллы
Верно выполнены: а), б)	4
При выполнении заданий а) или б) допущена ошибка или неточность, не повлиявшая на ход решения. Ответ верный	3
Верно выполнен только пункт б)	2
Верно выполнен только пункт а)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4